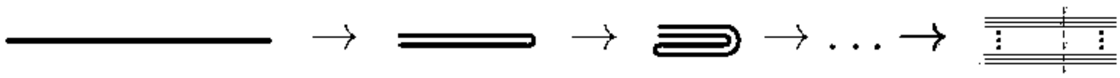
9 класс
Второй день

9.6. Саша взял кусок нити. Он сложил ее пополам, затем еще раз пополам, и так 10 раз. Потом он взял ножницы и разрезал полученную конструкцию в одном месте (таким образом, он перерезал нить в 1024 местах). В итоге нить распалась на куски. Выяснилось, что длины этих кусков принимают лишь два различных значения, наименьшее из которых равно 10 см. Найдите все возможные значения длины исходной нити.



9.7. Пусть на доске написаны несколько целых чисел (некоторые из которых могут быть равными). Скажем, что эти числа образуют *удачный набор*, если их нельзя разбить на две непустые группы так, чтобы произведение суммы чисел в одной группе и суммы чисел в другой было положительным. Учитель написал на доске несколько целых чисел. Докажите, что дети могут дописать к имеющимся ещё ровно одно целое число так, чтобы полученный набор оказался удачным.

9.8. На столе по кругу разложили 100 двухрублёвых и N пятирублёвых монет в некотором порядке. Известно, что выбрав из круга несколько подряд идущих монет, невозможно получить сумму ровно в 52 рубля. Каково наибольшее возможное значение числа N.

9.9. На столе стоят 12 сосудов, выстроенных в 4 ряда по 3 сосуда в каждом. В каждый сосуд налито некоторое (возможно, нулевое) количество воды. Известно, что суммарное количество воды в каждом ряду равно 1 л. Выясните, при каких α можно утверждать, что на столе найдутся два сосуда, количества воды в которых отличаются не более чем на α л?

9.10. Пусть M – середина стороны BC треугольника ABC. На продолжении стороны AB за точку B нашлась такая точка D, что $\angle ADM = \angle ACM = 30^\circ$. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ACD. Найдите угол OBC.

10 класс
Второй день

10.6. Изначально на табло горит число 0. При нажатии на кнопку число на табло изменяется на 50 или 51. На кнопку нажали 2025 раз. Может ли после этого на табло гореть число 25, если известно, что на табло не появлялись более чем двузначные числа, а также не появлялись отрицательные числа?

10.7. Дана трапеция $ABCD$. Известно то, что $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$, а биссектрисы углов C и D пересекаются в точке E, лежащей внутри трапеции. Докажите, что описанные окружности треугольников ABE и CDE касаются.

10.8. В клетчатом прямоугольнике 2×100 каждую клетку красят в белый или чёрный цвет. *Доминошкой* будем называть клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1. Оказалось, что существует единственный способ разбить данный прямоугольник 2×100 на доминошки так, чтобы каждая доминошка покрывала хотя бы 1 чёрную клетку. Найдите, какое наибольшее количество клеток могло быть покрашено в чёрный цвет?

10.9. Будем называть натуральное число *однобоким*, если оно больше 1, и все его простые делители заканчиваются на одну и ту же цифру. (Например, числа 19 и $117 = 3\cdot3\cdot13$ – однобокие, а число $682 = 2\cdot11\cdot31$ – нет.) Верно ли, что существует возрастающая арифметическая прогрессия с разностью, не превышающей 2025, состоящая из 150 натуральных чисел, каждое из которых – однобокое?

10.10. На графике функции $y = x^2$ отметили 1000 различных точек, абсциссы которых – целые числа из отрезка $[0;100000]$. Докажите, что можно выбрать шесть различных отмеченных точек A, B, C, A', B', C' таких, что площади треугольников ABC и $A'B'C'$ равны.

11 класс
Второй день

11.6. Изначально на табло горит число 0. При нажатии на кнопку число на табло изменяется на 50 или 51. На кнопку нажали 2025 раз. Может ли после этого на табло гореть число 25, если известно, что на табло не появлялись более чем двузначные числа, а также не появлялись отрицательные числа?

11.7. На 2025 островах Северного Ледовитого океана живут несколько медведей. Каждый медведь иногда совершает заплыв, переплывая с одного острова на другой. Выяснилось, что за год каждый медведь совершил хотя бы один заплыв, но никакие два медведя не сделали поровну заплывов. При этом между каждыми двумя островами A и B был совершён ровно один заплыв: либо из A в B, либо из B в A. Докажите, что на каком-то острове и в начале, и в конце года не было медведей.

11.8. В пространстве даны скрещивающиеся перпендикулярные прямые AB и CD. Точки E и F – середины отрезков AC и BD соответственно. Докажите то, что $\frac{AD+BC}{2} > BD - EF$.

11.9. Саша выбрал 199 многочленов с вещественными коэффициентами так, что сумма любых ста из них имеет вещественный корень. Докажите то, что сумма каких-то девяти из них также имеет вещественный корень.

11.10. Несколько карточек выложили в ряд слева направо, на каждой карточке написана буква русского алфавита. Будем называть набор из 33 карточек *идеальным*, если на этих карточках выписаны все буквы в алфавитном порядке слева направо. Известно, что при любом выборе одной буквы L русского алфавита найдутся 10^6 идеальных наборов, любые два из которых либо не имеют общих карточек, либо имеют ровно одну общую карточку, на которой написана буква L. При каком наибольшем k в этом ряду гарантированно можно найти k идеальных наборов, любые два из которых не имеют общих карточек?