5 класс

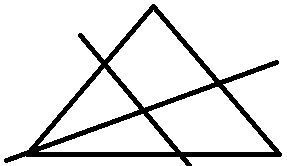
5.1. Масло стоит в три раза дороже молока, а молоко на 120 рублей дешевле масла. Определите, сколько стоят масло и молоко. Ответ обоснуйте.

**Ответ:** Масло 180 руб., молоко 60 руб.

**Решение:** Пусть молоко стоит рублей. Тогда масло стоит с одной стороны рублей, а с другой рублей. Отсюда , , – цена молока. Масло же стоит рублей.

**Критерии:** Только правильный ответ — 3 балла. Составлено правильное уравнение, которое решено неправильно — 5 баллов.

5.2. Можно ли разрезать двумя прямолинейными разрезами треугольный торт на 4 куска, чтобы получились два треугольника и два четырёхугольника?

**Решение:** 

**Критерии:** Любой верный пример – 7 баллов.

5.3. За столом сидят 12 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). Каждый из них заявил, что трое сидящих справа – лжецы. Сколько рыцарей может сидеть за столом?

**Ответ:** 3.

**Решение:** Все сидящие за столом не могут быть лжецами, потому что в этом случае все они сказали бы правду. Значит, среди них есть рыцарь, и трое сидящих справа от него – лжецы. Если четвёртый справа от рыцаря – лжец, то сидящий сразу справа от него же лжец сказал бы правду. Значит, четвёртый справа от рыцаря – тоже рыцарь. Аналогично, и восьмой справа от него – рыцарь, а все остальные – лжецы.

**Критерии:** Только правильный ответ – 1 балл. Правильный ответ с примером рассадки - 3 балла.

5.4. Какое имя зашифровано: 1213131? Каждая буква заменена своим номером в русском алфавите.

**Ответ:** Клава.

**Критерии:** Правильный ответ – 7 баллов.

5.5. У Айсена, Тани и Оли есть 12 карандашей: несколько зеленых, несколько синих и несколько красных. Они разложили карандаши по 4 штуки в три одинаковые коробки. Айсен сказал: «Смотрите, ни в одной коробке нет трёх одинаковых карандашей!» Таня сказала: «Верно. Но и трёх разных карандашей тоже нет ни в одной коробке!» Оля сказала: «И все коробки получились разными!». Все трое были правы. Обязательно ли в какой-то коробке лежит два зеленых и два красных карандаша? Объясните подробно свой ответ.

**Ответ:** Да.

**Решение:** В любой коробке, по словам Тани, отсутствует некоторый цвет. Значит, карандашей двух остальных цветов 4, но каждого цвета, по словам Айсена, не более 2. Поэтому в коробке по 2 карандаша двух цветов, и в коробке могут быть сочетания 2 синих – 2 зелёных, 2 зелёных – 2 красных, 2 красных – 2 синих. По словам Оли, все сочетания разные, следовательно, в трёх коробках по одному разу встречаются все три возможных сочетания, а значит в какой-то 2 зелёных и 2 красных карандаша.

**Критерии:** Только правильный ответ – 0 баллов. Если доказано, что в каждой коробке лежат по 2 карандаша двух разных цветов – 4 балла. Если это утверждение используется в правильном решении без доказательства – 3 балла.

6 класс

6.1. Ньургун в четыре раза старше Сандаары, а Сандаара на 9 лет младше Ньургуна. Определите, сколько лет каждому. Ответ обоснуйте.

**Ответ:** Ньургуну 12 лет, Сандааре 3 года.

**Решение:** Пусть Сандааре лет. Тогда Ньургуну с одной стороны лет, а с другой стороны лет. Значит, , , – возраст Сандаары. Ньургуну же 4 лет.

**Критерии:** Только правильный ответ – 2 балла. Составлено правильное уравнение, которое решено неправильно — 5 баллов.

6.2. На доске записан ряд из чисел и звездочек: 6, \*, \*, \*, \*, \*, \*, 7. Замените звездочки числами так, чтобы сумма любых трех чисел, стоящих подряд, равнялось 17.

**Ответ:** 6, 7, 4, 6, 7, 4, 6, 7.

**Решение:** Пусть подряд стоят числа a, b, c, d. Тогда a+b+c=17=b+c+d, a=d. Значит, числа стоящие через два других, равны, откуда четвёртое и седьмое числа равны 6, а второе и пятое равны 7. Тогда легко найти третье и шестое числа – они равны 17-6-7=4.

**Критерии:** Только правильный ответ – 3 балла.

6.3. За столом сидят 25 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). Каждый из них заявил, что четверо сидящих справа – лжецы. Сколько рыцарей может сидеть за столом?

**Ответ:** 5

Все сидящие за столом не могут быть лжецами, потому что в этом случае все они сказали бы правду. Значит, среди них есть рыцарь, и четверо сидящих справа от него – лжецы. Если пятый справа от рыцаря – лжец, то сидящий сразу справа от него же лжец сказал бы правду. Значит, пятый справа от рыцаря – тоже рыцарь. Аналогично, 10-ый, 15-ый и 20-ый люди справа от него – рыцари, а все остальные – лжецы.

**Критерии:** Только правильный ответ – 1 балл. Правильный ответ с примером рассадки - 2 балла.

6.4. Петя хочет взять с собой на праздник 10 шариков: синие, зелёные или красные — так, чтобы два утверждения были верны, а одно неверно:

— синих шариков на один больше, чем красных;

— красных и зелёных шариков поровну;

— синих шариков на 5 больше, чем зелёных.

Сколько и каких шариков нужно взять Пете? Ответ обоснуйте.

**Ответ:** 4 синих, 3 зелёных, 3 красных.

**Решение:** Пусть он взял с собой синих, зелёных и красных шариков. Тогда . Пусть верны первое и второе условия. Тогда и значит и , , , , что не удовлетворяет третьему условию, то есть подходит. Пусть верны второе и третье условия. Тогда и . Значит, и , , но – кол-во шариков, и нецелым оно быть не может. Пусть верны третье и первое условия. Тогда и . Значит, , , , . Такого тоже не может быть, потому что целое.

**Критерии:** Только верный ответ – 1 балл. Рассмотрен только случай, когда верны первое и второе условия, получен верный ответ – 3 балла.

6.5. Существуют ли 3 последовательных натуральных числа таких, что в записи этих чисел было ровно 8 двоек. (Последовательные числа отличаются на 1.)

**Ответ:** Да, например: 2219, 2220, 2221.

**Критерии:** Правильный пример – 7 баллов.

7 класс

7.1. Известно, что третья лампа потребляет столько же, сколько первая и вторая вместе. При этом первая лампа потребляет на 40 Вт меньше, чем третья лампа. Сколько электроэнергии потребляет вторая лампа?

**Ответ:** 40 Вт.

**Решение:** Потребление второй лампы – разность потреблений первой и третьей ламп. С другой стороны, разность потреблений первой и третьей ламп равна 40 Вт. Значит, потребление второй лампы – 40 вт.

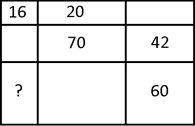
**Критерии:** Только правильный ответ – 1 балл.

7.2. В комнате сидят мальчики и девочки. Каждому мальчику дали 5 конфет, а каждой девочке – 6 конфет. Всего раздали 37 конфет. Сколько мальчиков и сколько девочек в комнате?

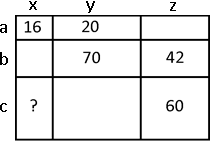
**Ответ:** 5 мальчиков и 2 девочки.

**Решение:** У каждого ребёнка не меньше 5 конфет, и если их хотя бы 8, то всего конфет не меньше , значит детей не больше 7. У каждого ребёнка не больше 6 конфет, и если их не больше 6, то конфет не больше , значит детей не меньше 7. Детей не больше и не меньше 7, поэтому их 7. Пусть мальчиков , тогда девочек и , , – кол-во мальчиков. Тогда девочек 7-5=2.

**Критерии:** Только правильный ответ –1 балл. Неполный перебор с правильным ответом – 5 баллов.

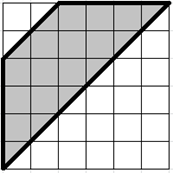
7.3. Прямоугольник разделен двумя вертикальными отрезками и двумя горизонтальными отрезками на 9 прямоугольников. Площади некоторых указаны на рисунке. Найдите площадь нижней левой части. Ответ обоснуйте. 

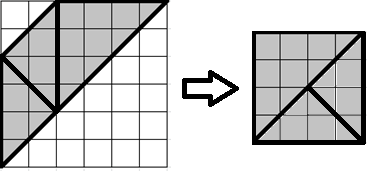
**Ответ:** 80.

**Решение:** Обозначим длины сторон через : 

, , , , .

Критерии: Только ответ – 1 балл. Приведен верный частный случай – 3 балла.

7.4. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на 3 части и сложите из них квадрат. 

**Решение:** 

**Критерии:** За любое верное разрезание и сложение – 7 баллов. Только верное разрезание без указания как сложить квадрат из полученных частей – 5 баллов.

7.5. У Балу есть 5 горшков меда весом 1, 2, 3, 4, 5 кг (на каждом горшке написан его вес). Проказник Маугли подложил в один из горшков камень весом 1 кг. Сможет ли Балу при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти горшок с камнем?

**Ответ:** Да, сможет.

**Решение:** Приведём пример возможных взвешиваний Балу:

1 взвешивание: Взвесим горшки, на которых написано «1», «5» и горшки «2», «4». Тогда в случае равенства камень будет в горшке с надписью «3».

2 взвешивание: Если чаша с горшками «1» и «5» оказалась тяжелее, то взвесим горшки «1»,«2» с горшком «3». Тогда если чаша с двумя горшками тяжелее, то камень в горшке «1». Если равенство, то камень не в «1», значит он в «5». Если в первом взвешивании чаша с горшками «2» и «4» оказалась тяжелее, то снова взвесим горшки «1» и «2» с горшком «3». Если чаша с двумя горшками тяжелее, то камень в «2», если же равенство, то камень не в «2», значит он в «4».

8 класс

8.1. Сколько существует трехзначных чисел кратных 11, вторая цифра которых равна 0?

**Ответ:** 8.

**Решение:** Воспользуемся признаком делимости на 11. Число делится на 11 в том и только том случае, если разность сумм цифр на нечётных и чётных местах кратна 11. Значит, сумма крайних цифр в трёхзначном числе должна делиться на 11 (то есть равна 11 – она не меньше 1+1=2 и не больше 9+9=18). Всего существует 8 вариантов, когда сумма цифр равна 11: 2+9, 3+8, 4+7, 5+6, 6+5, 7+4, 8+3, 9+2, откуда находим сами числа – 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902.

**Критерии:** Только правильный ответ - 1 балл, правильный ответ с примером – 7 баллов.

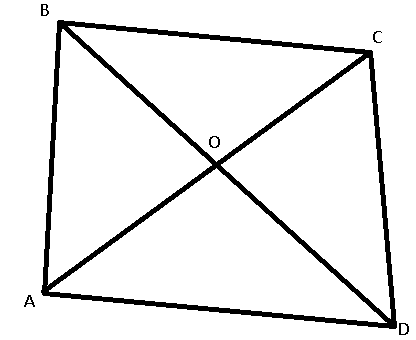
8.2. Можно ли расставить 11 различных натуральных чисел в круг так, чтобы сумма двух соседних чисел была простым числом. (Простое число – это число, имеющее ровно два различных натуральных делителя — единицу и самого себя. )

**Ответ:** нет.

**Решение:** Предположим противное – пусть такое возможно. Тогда сумма двух соседних чисел не меньше 1+2=3, потому что они различны. Их сумма – простое число, большее 2, а значит она нечётна. Тогда любые два соседних числа имеют разную чётность.

Кол-во чисел нечётно, поэтому рядом найдутся два числа одной чётности. Противоречие. Значит, так расставить числа нельзя.

3. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке O. Периметры треугольников равны 30, 11, 20 и 17 соответственно. Найдите длину отрезка .

**Ответ:** 8.

**Решение:**

**Критерии:** Только ответ – 1 балл.

4. Докажите неравенство для любых натуральных и :

**Решение:** Перенесём всё в левую часть, получим Это верно, потому что числа натуральны, а значит все они не меньше 1.

5. Двое играют на доске клеток. Они по очереди закрашивают какой-нибудь квадрат (любого возможного размера) на доске по линиям сетки. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре и как надо играть?

**Ответ:** Первый игрок.

**Решение:** Пусть сначала первый игрок закрасит квадрат клеток. Тогда останется полоска . Затем игроки будут красить квадраты и первый игрок покрасит последнюю клетку.

**Критерии:**  Только ответ – 0 баллов.

9 класс

1. Про числа и известно, что Чему может равняться разность (?

**Ответ:** 2 или -2.

**Решение:**

**Критерии**: Только оба правильных ответа – 1 балл. За один правильный ответ – 0 баллов.

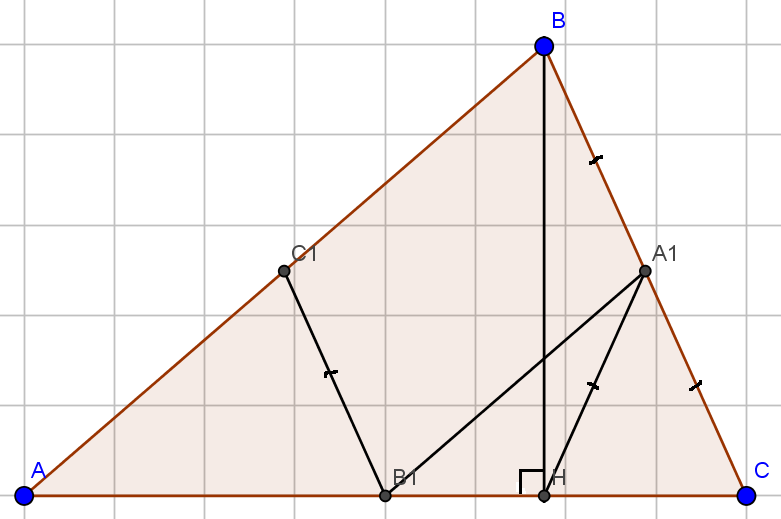
2. Сумма 63 различных натуральных чисел равняется 2017. Найдите эти числа.

**Ответ:** 1,2,3,…,62,64.

**Решение:** Рассмотрим наименьшую сумму различных 63 натуральных чисел: 1+2+3+…+63=2016. Так как исходная сумма на 1 больше, это значит, что какое-то число из этих 63 на 1 больше. Это может быть только число 63, так как числа должны быть различны.

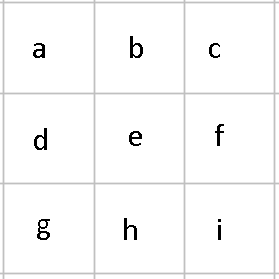
**Критерии:** Только правильный ответ – 1 балл.

3. В треугольнике ABC проведена высота BH. Пусть A1, B1, C1 - середины сторон BC, AC, AB соответственно. Докажите, что A1H=B1C1.

**Решение: **

Построим отрезок . Т.к. – средние линии, то они параллельны сторонам . Тогда – параллелограмм. – медиана прямоугольного треугольника , .

4. В каждой клетке таблицы записано число. Сумма чисел в любой строке и в любом столбце равна 1, а сумма чисел в любом квадрате равна 2. Какие числа записаны в таблице?

**Ответ: **

**Решение:** Пусть записаны числа a, b, c, d, e, f, g, h, i.

a+b+d+e=2, b+c+e+f=2, a+b+c=1, d+e+f=1. Сложив первые два равенства и вычтя третье и четвертое получим, что b+e=2. Из b+e+h=1 следует, что h=-1. Аналогично, d=b=f=-1. Тогда e=3, a=c=g=i=1.

**Критерии:** Только ответ – 1 балл.

5. Двое играют на доске клеток. Они по очереди закрашивают какой-нибудь квадрат (любого возможного размера) на доске по линиям сетки. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре и как надо играть?

**Ответ:** Первый игрок.

**Решение:** Пусть сначала первый игрок закрасит квадрат клеток. Тогда останется полоска . Затем игроки будут красить квадраты и первый игрок покрасит последнюю клетку.

**Критерии:** Только правильный ответ – 0 баллов.

10 класс

1. Могут ли произведения всех ненулевых цифр двух последовательных натуральных чисел отличаться ровно в 8 раз?

**Ответ:** Могут.

**Решение:** Например,89, 90

**Критерии**: За любой правильный ответ – 7 баллов.

2. Докажите, что для любых ненулевых чисел a и b уравнение имеет ровно два различных корня.

**Решение:** Посчитаем дискриминанты квадратных трехчленов в скобках: Они отличаются только знаком. Т.е. один из них положительный (т.е. квадратный трехчлен имеет два различных корня), а другой отрицательный(т.е. квадратный трехчлен не имеет корней). Либо оба равны нулю. Тогда, . И каждый из трехчленов имеет два равных корня, причем они различны.

3. Дан вписанный четырехугольник . Лучи и пересекаются в точке , а лучи и – в точке . Докажите, что  , если известно, что .

**Решение:** Заметим, что (), (вертикальные углы). Тогда по теореме синусов: , т.к. И так как , то .

4. Докажите неравенство для положительных

.

**Решение:** Пусть . Тогда нужно доказать неравенства или .

5. Двое играют на доске клеток. Они по очереди закрашивают какой-нибудь квадрат (любого возможного размера) на доске по линиям сетки. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре и как надо играть?

**Ответ:** Первый игрок.

**Решение:** Пусть сначала первый игрок закрасит квадрат клеток в середине доски так, чтобы сверху, слева и справа от закрашенного квадрата осталась полоса шириной в одну клетку. Всего останется 50 незакрашенных клеток. Затем игроки будут красить квадраты и первый игрок покрасит последнюю клетку.

**Критерии:** Только правильный ответ – 0 баллов.

11 класс.

1. Найдите наименьшее целое решение неравенства .

**Ответ:** .

**Решение:** .

*.* Следовательно, наименьший целый .

**Критерии:** Только ответ – 1 балл.

2. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может нарисовать на доске четырехугольник, у которого тангенсы всех четырех углов равны. Не хвастает ли барон?

**Ответ:** Четырехугольник с углами , , , .

**Критерии:** За приведенный правильный пример – 7 баллов.

3. Последовательность чисел строится следующим образом. Первое число в ней равно 3. Каждое последующее число равно сумме квадратов цифр предыдущего числа. Встретятся ли в этой последовательности два одинаковых числа?

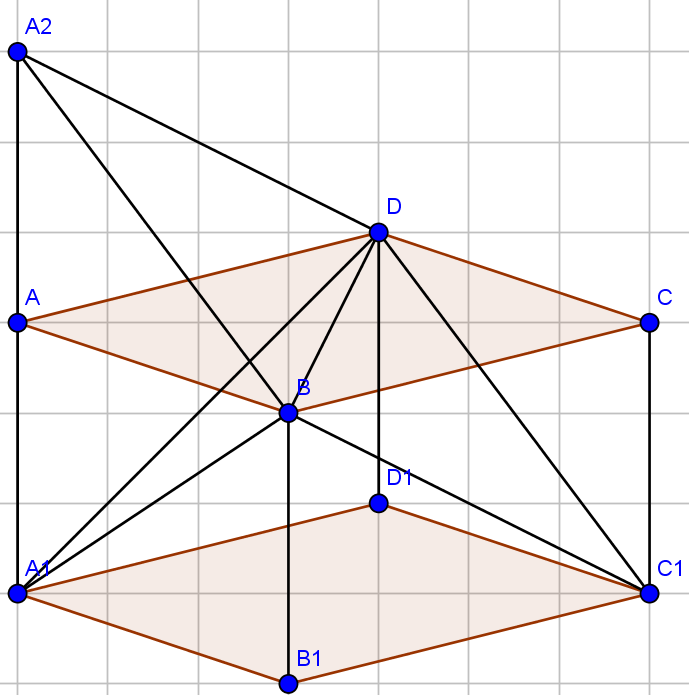
**Ответ:** Да.

**Решение:** 3, 9, 81, 65, 61, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, . . .

**Критерии:** Только за ответ «да» – 0 баллов.

4. Дан прямоугольный параллелепипед . Чему равно расстояние от вершины до плоскости , если известно, что расстояние от вершины до плоскости равно 1.

**Ответ: 1.**

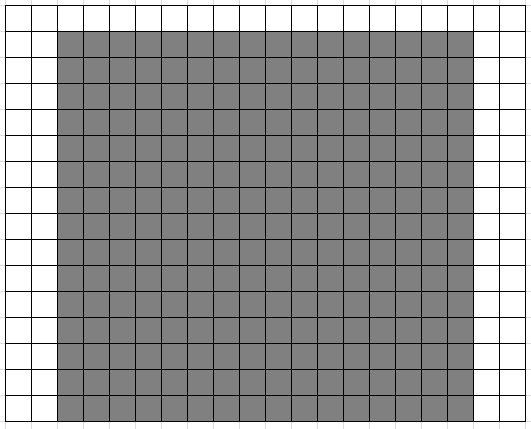
**Решение:** 

Построим точку так, чтобы точка была серединой отрезка . Тогда плоскости и симметричны относительно плоскости , т.е. расстояние от точки до этих плоскостей одинаково. Так плоскости и совпадают, то искомое расстояние равно 1.

**Критерии:** Только ответ – 1 балл.

5. Двое играют на доске клеток. Они по очереди закрашивают какой-нибудь квадрат (любого возможного размера) на доске по линиям сетки. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Дважды закрашивать клетки нельзя. Кто выиграет при правильной игре и как надо играть?

**Ответ:** Первый.

**Решение:** Первый игрок первым ходом закрашивает в середине квадрат 16х16.  Остается полоса 1х16 над квадратом и полосы 2х17 слева и справа. Далее, если второй игрок закрашивает какой-либо квадрат слева или справа, то первый игрок закрашивает такой же квадрат с другой стороны симметрично первому. Тогда количество ходов для закраски левой и правой полосы будет четным. В верхней полосе над квадратом можно закрашивать только квадраты 1х1, их четное количество. Тогда последний ход сделает первый игрок.

**Критерии:** Только ответ – 0 баллов.