Международная олимпиада
“Туймаада–2016”
Математика. Младшая лига
Второй день

5. В клетках таблицы 10×10 записаны положительные числа. На некоторых 5 клетках сидят лягушки, закрывая числа в этих клетках. Костя посчитал суммы видимых чисел и получил 10. Потом каждая лягушка перепрыгнула в соседнюю по стороне клетку, и Костя насчитал сумму 10^2. Потом лягушки снова прыгнули, и у Кости получилась сумма 10^3, и т. д. — каждая новая сумма оказывалась в 10 раз больше предыдущей. Какую наибольшую сумму мог получить Костя?

6. Существует ли такое натуральное число, состоящее из нечётных цифр, причём всех нечётных цифр в нём поровну, которое делится на любое 20-значное число, получаемое из него вычёркиванием цифр (ни вычеркиваемые, ни оставшиеся цифры не обязаны стоять подряд)?

7. Числа a, b, c, d таковы, что $0 < a \leqslant b \leqslant d \leqslant c$ и $a + c = b + d$. Докажите, что для любой внутренней точки P отрезка длины a существует единственный описанный четырёхугольник с последовательными сторонами a, b, c, d, вписанная окружность которого проходит через точку P.

8. На карте полетов авиакомпании M8 изображены несколько городов, некоторые пары городов связаны прямым (двусторонним) авиарейсом, причем всего имеется m авиарейсов. Требуется выбрать две непересекающиеся группы по r городов в каждой, такие что каждый город одной группы связан авиарейсом с каждым из городов второй группы. Докажите, что этот выбор можно осуществить не более чем $2m^r$ способами.

Международная олимпиада
“Туймаада–2016”
Математика. Старшая лига
Второй день

5. Простые числа p и q отличаются не более чем в два раза. Докажите, что найдутся такие два последовательных натуральных числа, что у одного из них наибольший простой делитель равен p, а у другого — q.

6. Числа a, b, c, d таковы, что $0 < a \leqslant b \leqslant d \leqslant c$ и $a + c = b + d$. Докажите, что для любой внутренней точки P отрезка длины a существует единственный описанный четырёхугольник с последовательными сторонами a, b, c, d, вписанная окружность которого проходит через точку P.

7. Докажите, что при положительных x, y, z выполнено неравенство

$$x^{24} + \sqrt[5]{y^{60} + z^{40}} \geqslant \left(x^8y^3 + \tfrac{1}{3}y^2z^2 + \tfrac{1}{9}x^3z^3\right)^2.$$

8. Дан связный граф. Докажите, что можно раскрасить все его вершины в синий и зелёный цвета и отметить в нём некоторые рёбра так, чтобы каждые две вершины были соединены путём из отмеченных рёбер, каждое отмеченное ребро соединяло вершины разных цветов и никакие две зелёные вершины не были соединены ребром исходного графа.