Международная олимпиада «Туймаада–2016»
Математика. Младшая лига
Первый день

1. Перед Таней и Сережей лежит куча из 2016 конфет. Таня и Сережа делают ходы по очереди, начинает Таня. При своем ходе ребенок может съесть либо одну конфету, либо, если в куче в данный момент четное число конфет, ровно половину всей кучи. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

2. На высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC отмечена точка D такая, что $\angle BDC = 90°$, и точка H — ортоцентр треугольника ABC. На отрезке AH как на диаметре построена окружность. Докажите, что длина касательной, проведенной к этой окружности из точки B, равна длине отрезка BD.

3. На одной из клеток клетчатой плоскости стоит кубик. На каждой грани кубика нарисована стрелочка в одном из четырех направлений, параллельных сторонам грани. Антон смотрит на кубик сверху и перекатывает его через ребро в направлении, указанном стрелкой, нарисованной на верхней грани. Докажите, что кубик никогда не заметет никакого квадрата 5×5.

4. Неотрицательные числа a, b и c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3$. Докажите неравенство

$$(a+b+c)^3 \geqslant 9(ab+bc+ca).$$

Международная олимпиада «Туймаада–2016»
Математика. Старшая лига
Первый день

√ **1.** Последовательность (a_n) задана условиями $a_1 = 0$,

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + 1.$$

Докажите, что $a_{2016} > \frac{1}{2} + a_{1000}$.

2. На одной из клеток клетчатой плоскости стоит кубик. На каждой грани кубика нарисована стрелочка в одном из четырёх направлений, параллельных сторонам грани. Антон смотрит на кубик сверху и перекатывает его через ребро в направлении, указанном стрелкой, нарисованной на верхней грани. Докажите, что кубик никогда не заметет никакого квадрата 5×5.

3. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA и AB соответственно. На отрезках AH, BH и HC_1 отмечены точки A_2, B_2, C_2 соответственно, такие что $\angle A_0B_2A_2 = \angle B_0C_2B_2 = \angle C_0A_2C_2 = 90°$. Докажите, что прямые AC_2, BA_2 и CB_2 пересекаются в одной точке.

4. При каждом натуральном k найдите число решений уравнения

$$8^k = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

в неотрицательных целых числах x, y, z, причем $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$.