Республиканская политехническая олимпиада школьников.
Республиканский этап.
15 марта 2024 г.
Решения.

Задача 1. (10 баллов)

Ось x направим вдоль наклонной плоскости (1), а ось y – перпендикулярно к ней. При этом оба движения – по оси x и по y – оказываются равноускоренными:

$$a_x = -gsin\alpha, \quad a_y = -gcos\alpha$$

Время полета тела

$$t = \frac{2v_0}{a_y} = \frac{2v_0}{gcos\alpha}.$$

Тогда перемещение тела за время полета

$$S = v_{0x}t - \frac{a_x t^2}{2} = v_0 cos\alpha \frac{2v_0}{gcos\alpha} - \frac{gsin\alpha \cdot 4v_0^2}{2 \cdot g^2 cos^2\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}\left(1 - \frac{sin\alpha}{cos^2\alpha}\right) = 30 \text{ м}.$$

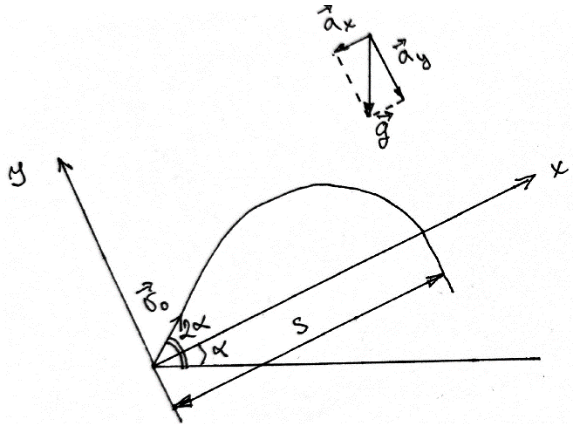


Рис. 1

Задача 2. (10 баллов)

Если часть груза падает на землю за время t_1, то грузы находились на высоте

$$h = \frac{gt_1^2}{2}.$$

Обозначим массу легкого груза через m_2, а тяжелого – m_1. ($m_2 = \frac{4}{5}m_1$) (рис. 2).

Запишем уравнение движения для груза массой m_1, ускорение которой направлено вниз, и для груза m_2, ускорение которой направлено вверх

$$m_1 g - T = m_1 a$$

$$T - m_2 g = m_2 a$$

Складывая уравнения, находим ускорение грузов

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

Время достижения тяжелого груза до земли находим из уравнения

$$h = \frac{at_2^2}{2}.$$

Тогда

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2}{a} \cdot \frac{gt_1^2}{2}} = t_1 \sqrt{\frac{g(m_1 + m_2)}{g(m_1 - m_2)}} = t_1 \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)}}.$$

Заменяя m_2 через m_1 и подставляя значение t_1получаем $t_2 = 3\ c$.

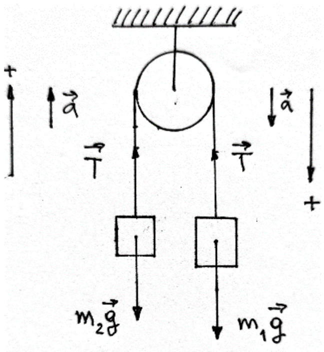


Рис. 2

Задача 3. (10 баллов)

Пусть удельное сопротивление материала фольги равно ρ , толщина d , длина короткой стороны прямоугольника из фольги - a , длинной - b . Тогда сопротивление фольги, подключенной к электродам короткой стороной, равно

$$r_1 = \frac{\rho b}{ad}$$

длинной –

$$r_2 = \frac{\rho a}{bd}$$

Умножая эти формулы друг на друга, найдем

$$\rho = d\sqrt{r_1 r_2},$$

Когда из той же фольги вырезается квадрат со стороной x и подключается своими сторонами к электродам, его сопротивление будет равно

$$r = \frac{\rho x}{xd} = \frac{\rho}{d} = \sqrt{r_1 r_2}.$$

От размера квадрата это сопротивление не зависит.

Задача 4. (10 баллов)

Силы, действующие на ползуны, показаны на рисунке 3. Это силы тяжести $m\vec{g}$ и $2m\vec{g}$, силы реакции направляющих $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$, направленные перпендикулярно направляющим, поскольку они гладкие, и силы $\vec{T}_A$ и $\vec{T}_B$ со стороны стержня, которые могут быть направлены только вдоль стержня (так как стержень не имеет массы). Поэтому второй закон Ньютона для ползунов дает

$$m\vec{a}_A = m\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{T}_A$$

$$2m\vec{a}_B = 2m\vec{g} + \vec{N}_B + \vec{T}_B.$$

Или в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси

$$ma_A = mg - T\sin\alpha \qquad (1)$$

$$2ma_B = T\cos\alpha$$

Здесь учтено, что модули сил натяжения стержня, действующих на ползуны одинаковы. Найдем связь ускорений ползунов. Поскольку стержень нерастяжим, проекции скоростей концов на стержень равны друг другу. Поэтому

$$\upsilon_A \sin\alpha = \upsilon_B \cos\alpha$$

Таким образом, в любой момент времени скорости концов связаны соотношением

$$\upsilon_B = \upsilon_A \mathrm{tg}\alpha$$

А, значит, такой же является и связь ускорений в самый первый момент времени после отпускания ползунов

$$a_B = a_A \mathrm{tg}\alpha \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1)-(2), получим

$$a_A = \frac{g\cos^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}, \qquad a_B = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}$$

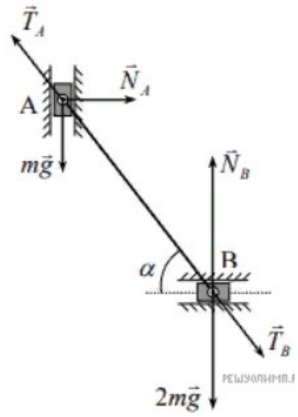


Рис. 3

Задача 5. (10 баллов)

Пусть масса верхнего контейнера m_1, плотность ρ_1, нижнего – соответственно m_2 и ρ_2, плотность воды - ρ_0. Поскольку веса верхнего и нижнего контейнеров в воде будут следующими ,

$$P_1 = (\rho_1 - \rho_0)gV_1, \quad P_2 = (\rho_2 - \rho_0)gV_2$$

где V_1 и V_2 - объемы верхнего и нижнего контейнеров, то сила натяжения троса, связывающего контейнеры, уменьшится в

$$k = \frac{\rho_2 g V_2}{(\rho_2 - \rho_0)gV_2} = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_0}$$

раз. Откуда

$$\rho_2 = \frac{k\rho_0}{k-1} = 4333 \text{ кг/м}^3.$$

Найдем теперь плотность верхнего контейнера. Для силы натяжения верхнего троса в воздухе (с учетом того, что сила натяжения верхнего троса в два раза больше силы натяжения троса, связывающего контейнеры) имеем

$$T_1 = \rho_1 g V_1 + \tfrac{1}{2}T_1 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}T_1 = \rho_1 g V_1 \qquad (*)$$

Для силы натяжения этого троса в воде, имеем аналогично

$$\tfrac{T_1}{n} = (\rho_1 - \rho_0)gV_1 + \tfrac{1}{k}\tfrac{T_1}{2} \quad \Rightarrow \quad T_1 \tfrac{2k-n}{2kn} = (\rho_1 - \rho_0)gV_1 \qquad (**)$$

Деля формулу (**) на формулу (*), получим

$$\frac{2k-n}{kn} = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}.$$

Откуда находим

$$\rho_1 = \frac{nk\rho_0}{nk - 2k + n} = 9750 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 6. (10 баллов)
Пусть масса пластины (до просверливания отверстий) равна M, а масса вещества, удаленного в первом случае при просверливании отверстий, равна Δm. Тогда, учитывая, что масса удаленного вещества во втором случае вдвое больше массы, удаленной во втором случае, имеем

$$M = m_1 + \Delta m$$

$$M = m_2 + 2\Delta m$$

Умножая первое уравнение системы на второе, и вычитая второе уравнение из первого, найдем

$$M = 2m_1 - m_2$$

В результате для плотности пластины получаем

$$\rho = \frac{2m_1 - m_2}{V}$$

Задача 7. (10 баллов)
Из условия следует, что красные и синие фишки должны чередоваться (на окружности), значит, всего их 40. Фишки по окружности размещаются равномерно в том смысле, что две диаметрально противоположные фишки делят множество оставшихся 38 фишек на две части по 19 фишек, расположенные в одной и другой полуокружностях относительно двух данных фишек. Это так, потому что согласно условию, каждая фишка имеет диаметрально противоположную. Диаметрально противоположные фишки имеют разный цвет, поэтому 19 фишек, расположенные в одной из полуокружностей должны чередоваться по цвету и начинаться и заканчиваться фишками разного цвета, что невозможно при нечётном 19. Следовательно, указанная в задаче расстановка фишек не возможна.

Ответ: нельзя.

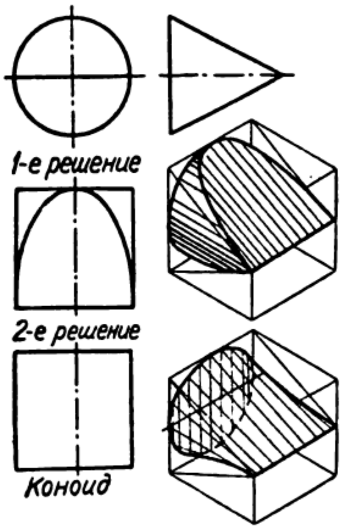
Задача 8. (10 баллов)
Будем считать, что скорость роста износа колеса является постоянной и не зависит от того насколько оно давно служит.
Очевидно, что задние колёса изнашиваются в 1,5 раза быстрее передних. Значит, когда задние колёса износятся на 60%, то передние – только на 40%. Это произойдёт после пробега

$$0{,}6 \cdot 16000 = 0{,}4 \cdot 24000 = 9600 \text{ (км)}.$$

В этот момент и следует сменить колёса. Оставшийся 40%-й ресурс задних колёс, поставленных спереди, и 60%-й ресурс передних колёс, поставленных сзади, очевидно, исчерпается одновременно, и произойдёт это ещё через 9600 км. Таким образом максимальный пробег составляет $2 \cdot 9600 = 19200$ км.
Замечание. Это лишь одно из множества возможных решений этой задачи.

Ответ: 19200 км.

Задача 9. (10 баллов)



Задача 10. (10 баллов)