9 класс

Второй день

9.6. На доске записано 7 различных чисел, сумма которых равна 10. Петя умножил каждое из них на сумму остальных шести и записал 7 полученных произведений в тетрадь. Оказалось, что в тетради встречаются только четыре различных числа. Найдите одно из чисел, записанных на доске.

9.7. На окружности длиной 1 метр отмечена точка. Из неё в одну и ту же сторону одновременно побежали два таракана с различными постоянными скоростями. Каждый раз, когда быстрый таракан догонял медленного, медленный мгновенно разворачивался, не меняя скорости. Каждый раз, когда они встречались лицом к лицу, быстрый мгновенно разворачивался, не меняя скорости. На каком расстоянии от отмеченной точки могла произойти их сотая встреча?

9.8. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $BP = PQ = QC$. Точки X и Y выбраны соответственно на отрезках AC и AB так, что $PX \perp AC$ и $QY \perp AB$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC равноудалена от прямых XQ и YP.

9.9. Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T, отмечены. Назовём множество из нескольких отмеченных точек *линейным*, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств? (Способы, отличающиеся порядком множеств, считаются одинаковыми.)

9.10. Существует ли натуральное число $n > 10^{100}$ такое, что десятичные записи чисел n^2 и $(n+1)^2$ отличаются перестановкой цифр? (Иначе говоря, в десятичных записях чисел n^2 и $(n+1)^2$ должно быть поровну цифр 0, поровну цифр 1, $\ldots$, поровну цифр 9.)

9 класс

Второй день

9.6. На доске записано 7 различных чисел, сумма которых равна 10. Петя умножил каждое из них на сумму остальных шести и записал 7 полученных произведений в тетрадь. Оказалось, что в тетради встречаются только четыре различных числа. Найдите одно из чисел, записанных на доске.

9.7. На окружности длиной 1 метр отмечена точка. Из неё в одну и ту же сторону одновременно побежали два таракана с различными постоянными скоростями. Каждый раз, когда быстрый таракан догонял медленного, медленный мгновенно разворачивался, не меняя скорости. Каждый раз, когда они встречались лицом к лицу, быстрый мгновенно разворачивался, не меняя скорости. На каком расстоянии от отмеченной точки могла произойти их сотая встреча?

9.8. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $BP = PQ = QC$. Точки X и Y выбраны соответственно на отрезках AC и AB так, что $PX \perp AC$ и $QY \perp AB$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC равноудалена от прямых XQ и YP.

9.9. Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T, отмечены. Назовём множество из нескольких отмеченных точек *линейным*, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств? (Способы, отличающиеся порядком множеств, считаются одинаковыми.)

9.10. Существует ли натуральное число $n > 10^{100}$ такое, что десятичные записи чисел n^2 и $(n+1)^2$ отличаются перестановкой цифр? (Иначе говоря, в десятичных записях чисел n^2 и $(n+1)^2$ должно быть поровну цифр 0, поровну цифр 1, …, поровну цифр 9.)

10 класс

Второй день

10.6. Сергей утверждает, что нашел различные вещественные числа x, y, z такие, что $\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}=4$. Могут ли слова Сергея быть правдой?

10.7. Петя утверждает, что он написал 10 подряд идущих натуральных чисел, и оказалось, что среди всех цифр, используемых в этих числах, каждая цифра (от 0 до 9) встречается одно и то же количество раз. Могли ли слова Пети оказаться правдой?

10.8. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle C = 90^\circ$. Известно, что его вершины A и D вместе с серединами сторон AB и BC лежат на одной окружности. Докажите, что вершины B и C вместе с серединами сторон AD и DC тоже лежат на одной окружности.

10.9. Найдите все тройки (не обязательно различных) натуральных чисел a, b, c такие, что каждое из чисел $a+bc$, $b+ca$, $c+ab$ является простым делителем числа $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$.

10.10. Каждый из 2024 людей является рыцарем или лжецом. Некоторые из них дружат друг с другом, причём дружба взаимна. Каждого из них спросили про количество друзей, и все ответы оказались различными целыми числами от 0 до 2023. Известно, что все рыцари отвечали на вопрос верно, а все лжецы изменяли истинный ответ ровно на 1. Какое наименьшее число лжецов могло быть среди этих людей?

10 класс

Второй день

10.6. Сергей утверждает, что нашел различные вещественные числа x, y, z такие, что $\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}=4$. Могут ли слова Сергея быть правдой?

10.7. Петя утверждает, что он написал 10 подряд идущих натуральных чисел, и оказалось, что среди всех цифр, используемых в этих числах, каждая цифра (от 0 до 9) встречается одно и то же количество раз. Могли ли слова Пети оказаться правдой?

10.8. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle C = 90^\circ$. Известно, что его вершины A и D вместе с серединами сторон AB и BC лежат на одной окружности. Докажите, что вершины B и C вместе с серединами сторон AD и DC тоже лежат на одной окружности.

10.9. Найдите все тройки (не обязательно различных) натуральных чисел a, b, c такие, что каждое из чисел $a+bc$, $b+ca$, $c+ab$ является простым делителем числа $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$.

10.10. Каждый из 2024 людей является рыцарем или лжецом. Некоторые из них дружат друг с другом, причём дружба взаимна. Каждого из них спросили про количество друзей, и все ответы оказались различными целыми числами от 0 до 2023. Известно, что все рыцари отвечали на вопрос верно, а все лжецы изменяли истинный ответ ровно на 1. Какое наименьшее число лжецов могло быть среди этих людей?

11 класс

Второй день

11.6. У учителя есть 100 гирь массами 1 г, 2 г, …, 100 г. Он хочет раздать Пете и Васе по 30 гирь так, чтобы выполнялось следующее условие: никакие 11 Петиных гирь не уравновешиваются никакими 12 Васиными гирями, а также никакие 11 Васиных гирь не уравновешиваются никакими 12 Петиными гирями. Сможет ли учитель это сделать?

11.7. График G_1 квадратного трехчлена $y = px^2 + qx + r$ с вещественными коэффициентами пересекает график G_2 квадратного трехчлена $y = x^2$ в точках A и B. Касательные в точках A и B к графику G_2 пересекаются в точке C. Оказалось, что точка C лежит на графике G_1. Найдите все возможные значения p.

11.8. В пространстве расположены 3 отрезка AA_1, BB_1 и CC_1 с общей серединой M. Оказалось, что сфера ω, описанная около тетраэдра $MA_1B_1C_1$, касается плоскости ABC в точке D. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что $MO = MD$.

11.9. Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T, отмечены. Назовём множество из нескольких отмеченных точек *линейным*, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств? (Способы, различающиеся порядком множеств, считаются одинаковыми.)

11.10. Дано натуральное число $n > 100$. Изначально на доске записано число 1. Каждую минуту Петя представляет число, записанное на доске, в виде суммы двух неравных положительных несократимых дробей, а Вася оставляет на доске только одну из этих двух дробей. Докажите, что Петя может добиться того, чтобы знаменатель оставшейся дроби через n минут не превышал $2^n + 50$ вне зависимости от действий Васи.

11 класс

Второй день

11.6. У учителя есть 100 гирь массами 1 г, 2 г, …, 100 г. Он хочет раздать Пете и Васе по 30 гирь так, чтобы выполнялось следующее условие: никакие 11 Петиных гирь не уравновешиваются никакими 12 Васиными гирями, а также никакие 11 Васиных гирь не уравновешиваются никакими 12 Петиными гирями. Сможет ли учитель это сделать?

11.7. График G_1 квадратного трехчлена $y = px^2 + qx + r$ с вещественными коэффициентами пересекает график G_2 квадратного трехчлена $y = x^2$ в точках A и B. Касательные в точках A и B к графику G_2 пересекаются в точке C. Оказалось, что точка C лежит на графике G_1. Найдите все возможные значения p.

11.8. В пространстве расположены 3 отрезка AA_1, BB_1 и CC_1 с общей серединой M. Оказалось, что сфера ω, описанная около тетраэдра $MA_1B_1C_1$, касается плоскости ABC в точке D. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что $MO = MD$.

11.9. Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T, отмечены. Назовём множество из нескольких отмеченных точек *линейным*, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств? (Способы, различающиеся порядком множеств, считаются одинаковыми.)

11.10. Дано натуральное число $n > 100$. Изначально на доске записано число 1. Каждую минуту Петя представляет число, записанное на доске, в виде суммы двух неравных положительных несократимых дробей, а Вася оставляет на доске только одну из этих двух дробей. Докажите, что Петя может добиться того, чтобы знаменатель оставшейся дроби через n минут не превышал $2^n + 50$ вне зависимости от действий Васи.