9 класс

Первый день

9.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, …, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?

9.2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k. Докажите, что диагонали всех таких трапеций проходят через одну точку.

9.3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Для игры в настольный теннис навылет всех жителей острова разделили на две команды A и B, причём в A жителей было больше, чем в B. Начали игру два игрока разных команд; после каждой партии проигравший игрок навсегда выходил из игры, а его заменял другой (ещё не игравший) член его команды. Проиграла команда, все члены которой вышли из игры. После турнира каждого члена команды A спросили: «Правда ли, что в какой-то игре ты проиграл лжецу?», а каждого члена команды B спросили: «Правда ли, что ты выиграл хотя бы у двух рыцарей?». Все ответы оказались утвердительными. Какая команда победила – A или B?

9.4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500.

9.5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На продолжениях боковых сторон AB и BC за точку B отмечены D и E соответственно, а на основании AC отмечена точка F, причем $AC = DE$ и $\angle CFE = \angle DEF$. Докажите, что $\angle ABC = 2\angle DFE$.

9 класс

Первый день

9.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, …, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?

9.2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k. Докажите, что диагонали всех таких трапеций проходят через одну точку.

9.3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Для игры в настольный теннис навылет всех жителей острова разделили на две команды A и B, причём в A жителей было больше, чем в B. Начали игру два игрока разных команд; после каждой партии проигравший игрок навсегда выходил из игры, а его заменял другой (ещё не игравший) член его команды. Проиграла команда, все члены которой вышли из игры. После турнира каждого члена команды A спросили: «Правда ли, что в какой-то игре ты проиграл лжецу?», а каждого члена команды B спросили: «Правда ли, что ты выиграл хотя бы у двух рыцарей?». Все ответы оказались утвердительными. Какая команда победила – A или B?

9.4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500.

9.5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На продолжениях боковых сторон AB и BC за точку B отмечены D и E соответственно, а на основании AC отмечена точка F, причем $AC = DE$ и $\angle CFE = \angle DEF$. Докажите, что $\angle ABC = 2\angle DFE$.

10 класс

Первый день

10.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, …, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?

10.2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k. Докажите, что продолжения боковых сторон всех таких трапеций проходят через одну точку.

10.3. По кругу стоят 100 белых точек. Оля и Ваня красят по очереди по одной ещё не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Оля. Оля хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Ваня – чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Оля может гарантировать себе независимо от игры Вани?

10.4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500.

10.5. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O. Центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA, DAB являются вершинами выпуклого четырёхугольника, периметр которого равен P. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников AOB, BOC, COD, DOA не превосходит $P/2$.

10 класс

Первый день

10.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, …, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?

10.2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k. Докажите, что продолжения боковых сторон всех таких трапеций проходят через одну точку.

10.3. По кругу стоят 100 белых точек. Оля и Ваня красят по очереди по одной ещё не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Оля. Оля хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Ваня – чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Оля может гарантировать себе независимо от игры Вани?

10.4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500.

10.5. Диагонали выпуклого четырёхугольника *ABCD* перпендикулярны и пересекаются в точке *O*. Центры вписанных окружностей треугольников *ABC*, *BCD*, *CDA*, *DAB* являются вершинами выпуклого четырёхугольника, периметр которого равен P. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOA* не превосходит $P/2$.

11 класс

Первый день

11.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, …, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?

11.2. Пусть $x_1 < x_1 < \cdots < x_{2024}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. При i = 1, 2, …, 2024 обозначим $p_i = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(x_i - \frac{1}{x_i}\right)$. Какое наибольшее количество натуральных числе может содержаться среди чисел $p_1, p_2, \dots, p_{2024}$?

11.3. По кругу стоят 100 белых точек. Оля и Ваня красят по очереди по одной ещё не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Оля. Оля хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Ваня – чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Оля может гарантировать себе независимо от игры Вани?

11.4. На отрезке XY как на диаметре построена полуокружность и выбрана произвольная точка Z на этом отрезке. Девять лучей из точки Z делят развернутый угол XZY на 10 равных частей и пересекают полуокружность в точках A_1, A_2, …, A_9 соответственно (в порядке обхода от X к Y). Докажите, что сумма площадей треугольников A_2ZA_3 и A_7ZA_8 равна площади четырехугольника $A_2A_3A_7A_8$.

11.5. Уравнение $t^4 + at^3 + bt^2 = (a + b)(2t - 1)$ имеет положительные решения $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Докажите, что $t_1t_4 > t_2t_3$.

11 класс

Первый день

11.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, …, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?

11.2. Пусть $x_1 < x_1 < \cdots < x_{2024}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. При i = 1, 2, …, 2024 обозначим $p_i = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(x_i - \frac{1}{x_i}\right)$. Какое наибольшее количество натуральных числе может содержаться среди чисел $p_1, p_2, \dots, p_{2024}$?

11.3. По кругу стоят 100 белых точек. Оля и Ваня красят по очереди по одной ещё не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Оля. Оля хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Ваня – чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Оля может гарантировать себе независимо от игры Вани?

11.4. На отрезке XY как на диаметре построена полуокружность и выбрана произвольная точка Z на этом отрезке. Девять лучей из точки Z делят развернутый угол XZY на 10 равных частей и пересекают полуокружность в точках A_1, A_2, …, A_9 соответственно (в порядке обхода от X к Y). Докажите, что сумма площадей треугольников A_2ZA_3 и A_7ZA_8 равна площади четырехугольника $A_2A_3A_7A_8$.

11.5. Уравнение $t^4 + at^3 + bt^2 = (a + b)(2t - 1)$ имеет положительные решения $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Докажите, что $t_1t_4 > t_2t_3$.