Числовые системы

Пузаренко В.Г.

Институт математики имени С.Л. Соболева,
Специализированный учебно–научный центр
Новосибирского государственного университета,
Новосибирск
e-mail: vagrig@math.nsc.ru

Чапаево, РС(Я)(01.08.2017)

Содержание

Представления о числах

- Натуральные числа.
- Целые и рациональные числа.
- Действительные числа.
- Комплексные числа и кватернионы.

Действительные числа

- Способы построения действительных чисел.
- Свойства действительных чисел.
- Числовые системы со странностями.

Натуральные числа

1. (МарьВанна в первом классе) Числа, которые используются для счета.

Натуральные числа

1. (МарьВанна в первом классе) Числа, которые используются для счета.
2. 1, 2, 3, 4, ...????

Натуральные числа

1. (МарьВанна в первом классе) Числа, которые используются для счета.
2. $1, 2, 3, 4, \ldots ????$
3. T_0,

Натуральные числа

1. (МарьВанна в первом классе) Числа, которые используются для счета.
2. 1, 2, 3, 4, ...????
3. T_0,T_1,

Натуральные числа

1. (МарьВанна в первом классе) Числа, которые используются для счета.
2. 1, 2, 3, 4, ...????
3. $T_0, T_1, T_2,$

Натуральные числа

1. (МарьВанна в первом классе) Числа, которые используются для счета.
2. 1, 2, 3, 4, ...????
3. $T_0, T_1, T_2, T_3,$

Натуральные числа

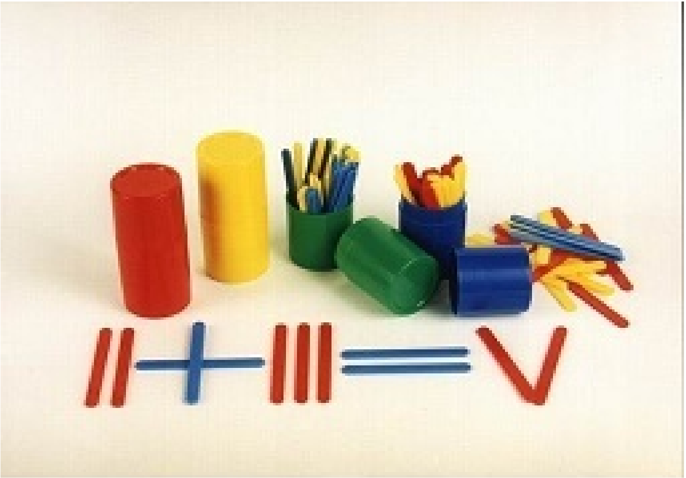
1. (МарьВанна в первом классе) Числа, которые используются для счета.
2. $1, 2, 3, 4, \ldots ????$
3. $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}},$

Натуральные числа

1. (МарьВанна в первом классе) Числа, которые используются для счета.
2. 1, 2, 3, 4, ...????
3. $T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}, T_4$.


ПРО КОЗЛЁНКА,
КОТОРЫЙ УМЕЛ СЧИТАТЬ
ДО ДЕСЯТИ

Счетные палочки



А операции?

$5 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1 = 1 + 4 =$

А операции?

$$5 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1 = 1 + 4 =$$
$$= 5 + 0 = 0 + 5?$$

А операции?

$5 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1 = 1 + 4 =$
$= 5 + 0 = 0 + 5?$

А какие операции?

Любая числовая система теряет всякий смысл, если на ней отсутствуют операции и отношения.

Задача о гидре

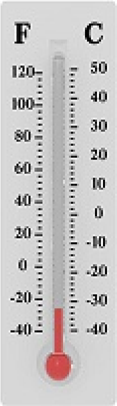
Задача о гидре

Богатырь отрубает голову, а каждая группа из шей, состоящая из n штук, увеличивается на единицу. Сможет ли богатырь в конечном итоге зарубить гидру?

Задача о гидре

- $7 = 2^2 + 2 + 1$, $7 - 1 = 6 = 2^2 + 2$.
- $3^3 + 3 = 30$, $30 - 1 = 3^3 + 2$.
- $4^4 + 2 = 130$, $130 - 1 = 4^4 + 1$.
- $5^5 + 1 = 3126$, $3126 - 1 = 5^5$.

Ответ на задачу утвердительный, однако не имеет доказательства, использующего свойства натуральных чисел.


F
C
120
100
80
60
40
20
0
-20
-40
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40

Абсолютный нуль

Абсолютный нуль: Саирис

В безразличной, немой темноте
Согревают лишь грезы.
На снегу серебрятся кристаллы
Колючего льда...
В неподвижные ветки деревьев
Вморожены звезды;
И еще одна ночь пролетит,
Не оставив следа.


OUR NATIONAL DEBT:
$8,348,426,616,958.
YOUR family share
$91,112.
THE NATIONAL DEBT

Целые числа получаются как всевозможные разности натуральных чисел.

Рациональные числа

Мы делили апельсин

Мы делили апельсин,
Много нас, а он один.
Эта долька — для ежа,
Эта долька — для стрижа,
Эта долька — для утят,
Эта долька — для котят,
Эта долька — для бобра,
А для волка — кожура.
Он сердит на нас — беда!!!
Разбегайтесь кто–куда!

Половина не может быть бо̀льшей или мѐньшей: половина есть половина.

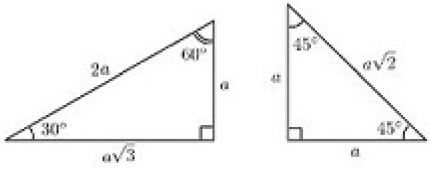
Половина не может быть бòльшей или мèньшей: половина есть половина.

Объясните еще раз, а то бòльшая половина не поняла.

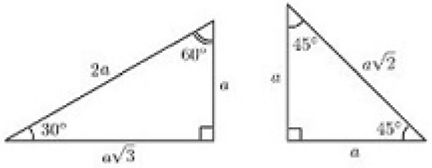
Рациональные числа

Рациональные числа получаются как всевозможные дроби целых чисел с ненулевыми знаменателями.

Иррациональные числа

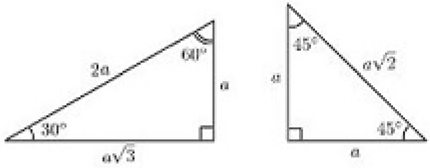


Иррациональные числа



$\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ — числа, не являющиеся рациональными (иррациональные числа).

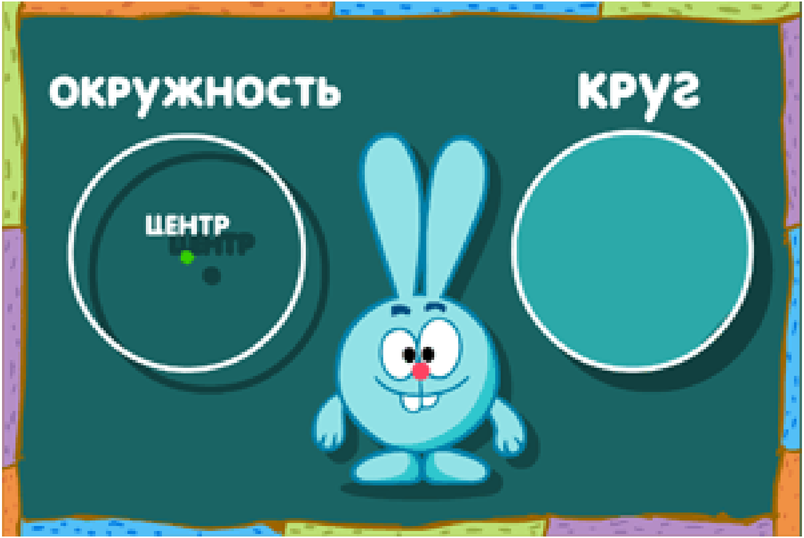
Иррациональные числа



$\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ — числа, не являющиеся рациональными (иррациональные числа).

Однако эти числа являются алгебраическими, а именно, корнями полиномов с целочисленными коэффициентами: $x^2 - 2 = 0$, $x^2 - 3 = 0$.

Трансцендентные числа



Трансцендентные числа

Отношение длины окружности к ее диаметру, совпадающее с отношением площади круга к квадрату радиуса (называемое числом π), не является алгебраическим. Такие числа называются трансцендентными.

Комплексные числа

- (МарьВанна) Корни квадратные можно извлекать только из неотрицательных чисел.

Комплексные числа

- (МарьВанна) Корни квадратные можно извлекать только из неотрицательных чисел.
- $\imath^2 = -1$ (мнимая единица).

Комплексные числа

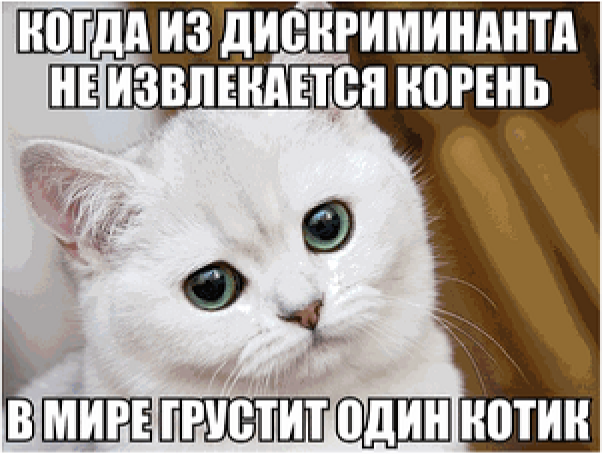
- (МарьВанна) Корни квадратные можно извлекать только из неотрицательных чисел.
- $\imath^2 = -1$ (мнимая единица).
- (Основная теорема алгебры) Любой полином ненулевой степени имеет корень.

Комплексные числа

- (МарьВанна) Корни квадратные можно извлекать только из неотрицательных чисел.
- $\imath^2 = -1$ (мнимая единица).
- (Основная теорема алгебры) Любой полином ненулевой степени имеет корень.
- При нахождении корней кубического полинома необходимо использование комплексных чисел, даже если все его корни являются действительными числами.

Комплексные числа

- (МарьВанна) Корни квадратные можно извлекать только из неотрицательных чисел.
- $\imath^2 = -1$ (мнимая единица).
- (Основная теорема алгебры) Любой полином ненулевой степени имеет корень.
- При нахождении корней кубического полинома необходимо использование комплексных чисел, даже если все его корни являются действительными числами.
- Комплексные числа активно используются в различных разделах физики, особенно в описании электромагнитных и волновых процессов.


КОГДА ИЗ ДИСКРИМИНАНТА
НЕ ИЗВЛЕКАЕТСЯ КОРЕНЬ
В МИРЕ ГРУСТИТ ОДИН КОТИК

Кватернионы

- Каким способом еще можно расширить действительные числа с помощью конечного числа элементов и отчего при этом придется отказаться?

Кватернионы

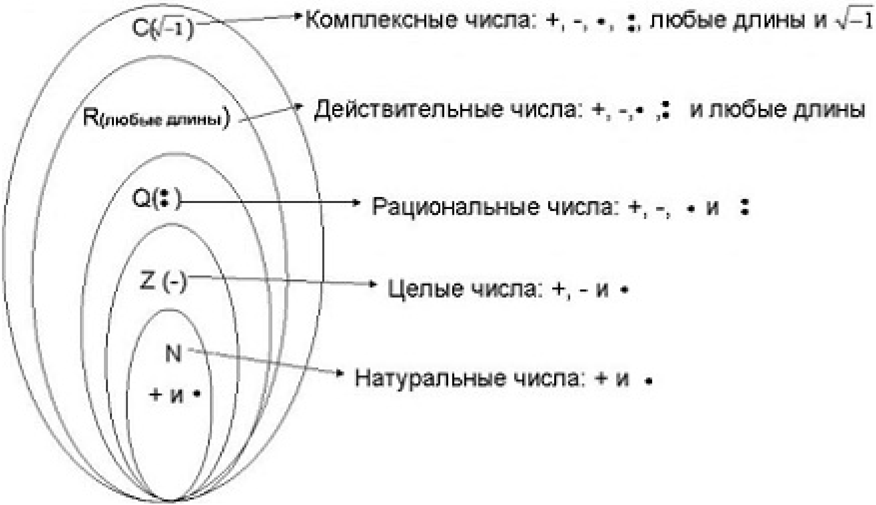
- Каким способом еще можно расширить действительные числа с помощью конечного числа элементов и отчего при этом придется отказаться?
- $\imath^2 = \jmath^2 = k^2 = -1$, $\imath \cdot \jmath = -\jmath \cdot \imath = k$.

Кватернионы

- Каким способом еще можно расширить действительные числа с помощью конечного числа элементов и отчего при этом придется отказаться?
- $\imath^2 = \jmath^2 = k^2 = -1$, $\imath \cdot \jmath = -\jmath \cdot \imath = k$.
- (Теорема Фробениуса) Список конечномерных тел над полем действительных чисел исчерпывается действительными числами, комплексными числами и кватернионами.

Кватернионы

- Каким способом еще можно расширить действительные числа с помощью конечного числа элементов и отчего при этом придется отказаться?
- $\imath^2 = \jmath^2 = k^2 = -1$, $\imath \cdot \jmath = -\jmath \cdot \imath = k$.
- (Теорема Фробениуса) Список конечномерных тел над полем действительных чисел исчерпывается действительными числами, комплексными числами и кватернионами.
- Кватернионные методы, относящиеся к современным методам теоретически механики, нашли эффективное применение в навигации, управлении движением тел, небесной механике, механике космического полета, приборостроении, робототехнике, релятивистской механике, теории поля, компьютерной графике.


C(√−1)
Комплексные числа: +, -, •, :, любые длины и √−1
R(любые длины)
Действительные числа: +, -,• ,: и любые длины
Q(:)
Рациональные числа: +, -, • и :
Z (-)
Целые числа: +, - и •
N
+ и •
Натуральные числа: + и •

Сечения

Пара $(A|B)$ множеств рациональных чисел называется сечением, если выполняется следующее:

1. $q_1 \in A,\ q_2 \in B \Rightarrow q_1 < q_2$;
2. $A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing,\ A \cup B = \mathbb{Q}$;
3. B не имеет наибольшего числа.

Примеры

1. $A = \{q \in \mathbb{Q} | q \leqslant q_0\}$, $B = \{q \in \mathbb{Q} | q > q_0\}$ образуют сечение, где $q_0 \in \mathbb{Q}$; это сечение сопоставляется рациональному числу q_0.

Примеры

1. $A = \{q \in \mathbb{Q} | q \leqslant q_0\}$, $B = \{q \in \mathbb{Q} | q > q_0\}$ образуют сечение, где $q_0 \in \mathbb{Q}$; это сечение сопоставляется рациональному числу q_0.
2. $A = \{q \in \mathbb{Q} | q < 0$ или $q^2 < 2\}$,
   $B = \{q \in \mathbb{Q} | q > 0$ и $q^2 > 2\}$ образуют сечение, которое соответствует числу $\sqrt{2}$.

Примеры

1. $A=\{q\in\mathbb{Q}|q\leqslant q_0\}$, $B=\{q\in\mathbb{Q}|q>q_0\}$ образуют сечение, где $q_0\in\mathbb{Q}$; это сечение сопоставляется рациональному числу q_0.
2. $A=\{q\in\mathbb{Q}|q<0$ или $q^2<2\}$,
$B=\{q\in\mathbb{Q}|q>0$ и $q^2>2\}$ образуют сечение, которое соответствует числу $\sqrt{2}$.
3. $A=\{q\in\mathbb{Q}|q<0,5\}$, $B=\{q\in\mathbb{Q}|q>0,5\}$ не образуют сечение (почему?)

Сложение

Пусть $(A_1|B_1)$, $(A_2|B_2)$ — сечения. Положим

$$A_1 + A_2 = \{q_1 + q_2 | q_1 \in A_1,\ q_2 \in A_2\},$$

$$B_1 + B_2 = \{q_1 + q_2 | q_1 \in B_1,\ q_2 \in B_2\}.$$

Сложение

Пусть $(A_1|B_1)$, $(A_2|B_2)$ — сечения. Положим

$$A_1 + A_2 = \{q_1 + q_2 | q_1 \in A_1,\ q_2 \in A_2\},$$

$$B_1 + B_2 = \{q_1 + q_2 | q_1 \in B_1,\ q_2 \in B_2\}.$$

Далеко не всегда $(A_1 + A_2|B_1 + B_2)$ будут образовывать сечение. В качестве сечения для сложения следует взять $(\mathbb{Q} \setminus (B_1 + B_2)|B_1 + B_2)$.

Порядок

$$(A_1|B_1) \leqslant (A_2|B_2) \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2 \Leftrightarrow B_1 \supseteq B_2.$$

Противоположное число

Пусть $(A|B)$ — сечение. Определим $-(A|B)$ следующим образом.

1. Если A имеет наибольший элемент q_0, то $-(A|B) = (\{q \in \mathbb{Q} | q \leqslant -q_0\} | \{q \in \mathbb{Q} | q > -q_0\})$.
2. Если A не имеет наибольшего элемента, то $-(A|B) = (\{q \in \mathbb{Q} | -q \in B\} | \{q \in \mathbb{Q} | -q \in A\})$.

Умножение

Пусть $(A_1|B_1) \geqslant 0$, $(A_2|B_2) \geqslant 0$ — сечения . Положим

$$A_1 \bullet A_2 = \{q_1 \cdot q_2 | q_1 \in A_1,\ q_2 \in A_2; q_1 \geqslant 0, q_2 \geqslant 0\} \cup \{q \in \mathbb{Q} | q < 0\},$$

$$B_1 \bullet B_2 = \{q_1 \cdot q_2 | q_1 \in B_1,\ q_2 \in B_2\}.$$

Умножение

Пусть $(A_1|B_1) \geqslant 0$, $(A_2|B_2) \geqslant 0$ — сечения . Положим

$$A_1 \bullet A_2 = \{q_1 \cdot q_2 | q_1 \in A_1,\ q_2 \in A_2; q_1 \geqslant 0, q_2 \geqslant 0\} \cup \{q \in \mathbb{Q} | q < 0\},$$

$$B_1 \bullet B_2 = \{q_1 \cdot q_2 | q_1 \in B_1,\ q_2 \in B_2\}.$$

Далеко не всегда $(A_1 \bullet A_2 | B_1 \bullet B_2)$ будут образовывать сечение. В качестве сечения для умножения следует взять $(\mathbb{Q} \setminus (B_1 \bullet B_2) | B_1 \bullet B_2)$.

Десятичные дроби

Любое действительное число представимо в виде бесконечной десятичной дроби, причем в общем случае неоднозначно.

Десятичные дроби

Любое действительное число представимо в виде бесконечной десятичной дроби, причем в общем случае неоднозначно.

Примеры

1. $\frac{1}{2} = 0,500000... = 0,5 = 0,5(0) = 0,4(9)$

Десятичные дроби

Любое действительное число представимо в виде бесконечной десятичной дроби, причем в общем случае неоднозначно.

Примеры

1. $\frac{1}{2} = 0,500000... = 0,5 = 0,5(0) = 0,4(9)$
2. $\frac{1}{11} = 0,(09)$
3. $\sqrt{2} = 1,4142...$

Десятичные дроби

Любое действительное число представимо в виде бесконечной десятичной дроби, причем в общем случае неоднозначно.

Примеры

1. $\frac{1}{2} = 0,500000... = 0,5 = 0,5(0) = 0,4(9)$
2. $\frac{1}{11} = 0,(09)$
3. $\sqrt{2} = 1,4142...$
4. $1 = 0,(9)$

Другими словами, любая конечная десятичная дробь равна некоторой дроби с хвостом из девяток.

$$[2, 3, 5, 2, 3, 10, ...] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{10 + \dots}}}}}$$

$$[2,3,5,2,3,10,...] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{10 + \ldots}}}}}$$

Любое действительное число представимо в виде непрерывной дроби, причем такое представление однозначное.

Непрерывные дроби

- Любое рациональное число представимо в виде конечной непрерывной дроби. Например, $\frac{42}{19} = [2, 4, 1, 3]$.

Непрерывные дроби

- Любое рациональное число представимо в виде конечной непрерывной дроби. Например, $\frac{42}{19} = [2, 4, 1, 3]$.
- Любая квадратичная иррациональность представима в виде периодической непрерывной дроби. Верно и обратное. Например, $\sqrt{2} = [1, (2)]$.

Непрерывные дроби

- Любое рациональное число представимо в виде конечной непрерывной дроби. Например, $\frac{42}{19} = [2, 4, 1, 3]$.
- Любая квадратичная иррациональность представима в виде периодической непрерывной дроби. Верно и обратное. Например, $\sqrt{2} = [1, (2)]$.
- Например, $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, ..., 1, 1, 2n, ...]$.

Задача

Среди обыкновенных дробей, расположенных между $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$, найти дробь с наименьшим положительным знаменателем.

Задача

Среди обыкновенных дробей, расположенных между $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$, найти дробь с наименьшим положительным знаменателем.

Можно, конечно, попытаться решить задачу перебором, но...

Задача

Среди обыкновенных дробей, расположенных между $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$, найти дробь с наименьшим положительным знаменателем.

Можно, конечно, попытаться решить задачу перебором, но...
$\frac{96}{35} = [2, 1, 2, 1, 8]$, $\frac{97}{36} = [2, 1, 2, 3, 1, 2]$. Промежуточной дробью будет $[2, 1, 2, 2] = \frac{19}{7}$.

Разрешимость

Речь идет о свойствах, которые можно сформулировать, используя заданные отношения и операции и логические связки (и, или, не, влечет, существует, для каждого).
Разрешимость означает существование алгоритма, использование которого позволяет определять, истинно или ложно свойство.

Разрешимость

Речь идет о свойствах, которые можно сформулировать, используя заданные отношения и операции и логические связки (и, или, не, влечет, существует, для каждого). Разрешимость означает существование алгоритма, использование которого позволяет определять, истинно или ложно свойство.

1. Теория натуральных чисел неразрешима.

Разрешимость

Речь идет о свойствах, которые можно сформулировать, используя заданные отношения и операции и логические связки (и, или, не, влечет, существует, для каждого). Разрешимость означает существование алгоритма, использование которого позволяет определять, истинно или ложно свойство.

1. Теория натуральных чисел неразрешима.
2. Теория целых чисел неразрешима.

Разрешимость

Речь идет о свойствах, которые можно сформулировать, используя заданные отношения и операции и логические связки (и, или, не, влечет, существует, для каждого). Разрешимость означает существование алгоритма, использование которого позволяет определять, истинно или ложно свойство.

1. Теория натуральных чисел неразрешима.
2. Теория целых чисел неразрешима.
3. Теория рациональных чисел неразрешима.

Разрешимость

Речь идет о свойствах, которые можно сформулировать, используя заданные отношения и операции и логические связки (и, или, не, влечет, существует, для каждого). Разрешимость означает существование алгоритма, использование которого позволяет определять, истинно или ложно свойство.

1. Теория натуральных чисел неразрешима.
2. Теория целых чисел неразрешима.
3. Теория рациональных чисел неразрешима.
4. Теория действительных чисел разрешима.

Разрешимость

Речь идет о свойствах, которые можно сформулировать, используя заданные отношения и операции и логические связки (и, или, не, влечет, существует, для каждого). Разрешимость означает существование алгоритма, использование которого позволяет определять, истинно или ложно свойство.

1. Теория натуральных чисел неразрешима.
2. Теория целых чисел неразрешима.
3. Теория рациональных чисел неразрешима.
4. Теория действительных чисел разрешима.
5. Теория комплексных чисел разрешима.

Количество

Все числовые системы бесконечны.

Количество

Все числовые системы бесконечны.

1. Натуральные числа можно занумеровать натуральными числами.

Количество

Все числовые системы бесконечны.

1. Натуральные числа можно занумеровать натуральными числами.
2. Целые числа можно занумеровать натуральными числами.

Количество

Все числовые системы бесконечны.

1. Натуральные числа можно занумеровать натуральными числами.
2. Целые числа можно занумеровать натуральными числами.
3. Рациональные числа можно занумеровать натуральными числами.

Количество

Все числовые системы бесконечны.

1. Натуральные числа можно занумеровать натуральными числами.
2. Целые числа можно занумеровать натуральными числами.
3. Рациональные числа можно занумеровать натуральными числами.
4. Действительные числа невозможно занумеровать натуральными числами.

Количество

Все числовые системы бесконечны.

1. Натуральные числа можно занумеровать натуральными числами.
2. Целые числа можно занумеровать натуральными числами.
3. Рациональные числа можно занумеровать натуральными числами.
4. Действительные числа невозможно занумеровать натуральными числами.
5. Комплексные числа невозможно занумеровать натуральными числами.

Количество

Все числовые системы бесконечны.

1. Натуральные числа можно занумеровать натуральными числами.
2. Целые числа можно занумеровать натуральными числами.
3. Рациональные числа можно занумеровать натуральными числами.
4. Действительные числа невозможно занумеровать натуральными числами.
5. Комплексные числа невозможно занумеровать натуральными числами.
6. Кватернионы невозможно занумеровать натуральными числами.

На практике необходимо нахождение решений с достаточной точностью. В этом случае используются только рациональные числа из некоторого достаточно большого промежутка.

История от М.Хазина

Ученые–физики попросили проверить действие одной формулы, чтобы ее точность была 10^5. Вроде все было учтено, но... внимание привлекла некоторая постоянная:

История от М.Хазина

Ученые–физики попросили проверить действие одной формулы, чтобы ее точность была 10^5. Вроде все было учтено, но... внимание привлекла некоторая постоянная: $6,28$.

Порядки

- Порядок на натуральных числах имеет наименьший, не имеет наибольшего числа. Каково бы ни было натуральное число, имеется число, которое непосредственно следует за ним (дискретность).

Порядки

- Порядок на натуральных числах имеет наименьший, не имеет наибольшего числа. Каково бы ни было натуральное число, имеется число, которое непосредственно следует за ним (дискретность).
- Порядок на целых числах не имеет ни наименьшего, ни наибольшего чисел. Кроме того, выполняется свойство дискретности.

Порядки

- Порядок на натуральных числах имеет наименьший, не имеет наибольшего числа. Каково бы ни было натуральное число, имеется число, которое непосредственно следует за ним (дискретность).
- Порядок на целых числах не имеет ни наименьшего, ни наибольшего чисел. Кроме того, выполняется свойство дискретности.
- Порядок на рациональных числах не имеет ни наименьшего, ни наибольшего чисел. Кроме того, между любыми двумя различными числами q_1 и q_2 имеется рациональное число, к примеру, $q_1 < \frac{q_1+q_2}{2} < q_2$ (плотность).

Порядок

- Порядок на действительных числах не имеет ни наименьшего, ни наибольшего чисел. Кроме того, между любыми двумя различными числами имеется как рациональное, так и иррациональное числа.

Порядок

- Порядок на действительных числах не имеет ни наименьшего, ни наибольшего чисел. Кроме того, между любыми двумя различными числами имеется как рациональное, так и иррациональное числа.
- Не существует порядка на комплексных числах и кватернионах, согласованного с операциями сложения и умножения.

О единственности дробей

Пара слов о p-адических числах.

О единственности дробей

Пара слов о p-адических числах.

- Разрешимость.
- Невозможно занумеровать натуральными числами.

О единственности дробей

Пара слов о p-адических числах.

- Разрешимость.
- Невозможно занумеровать натуральными числами.
- Единственность представления в виде бесконечного ряда.

О единственности дробей

Пара слов о p-адических числах.

- Разрешимость.
- Невозможно занумеровать натуральными числами.
- Единственность представления в виде бесконечного ряда.
- Если полином с целочисленными коэффициентами имеет действительный и p-адический корень для любого простого p, то он имеет рациональный корень.

О единственности дробей

Пара слов о p-адических числах.

- Разрешимость.
- Невозможно занумеровать натуральными числами.
- Единственность представления в виде бесконечного ряда.
- Если полином с целочисленными коэффициентами имеет действительный и p-адический корень для любого простого p, то он имеет рациональный корень.

(Ершов, 2000) Построено поле, которое обладает всеми хорошими свойствами и содержит все действительные и p-адические числа.

Делим нуль

МарьВанна

Если произведение чисел равно нулю, то хотя бы одно из них обращается в нуль.

Всегда ли это так? И что может произойти, если отказаться от этого свойства?

Делим нуль

МарьВанна

Если произведение чисел равно нулю, то хотя бы одно из них обращается в нуль.

Всегда ли это так? И что может произойти, если отказаться от этого свойства?
Пусть m — составное натуральное число (например, $m = 10 = 2 \cdot 5$) и $\mathbb{Z}_m$ — множество остатков от при делении на m (в нашем случае, $\overline{1}$; $\overline{2}$; $\overline{3}$; $\overline{4}$; $\overline{5}$; $\overline{6}$; $\overline{7}$; $\overline{8}$; $\overline{9}$; $\overline{0}$). Тогда $\overline{2} \cdot \overline{5} = \overline{0}$.

Делим нуль

МарьВанна

Если произведение чисел равно нулю, то хотя бы одно из них обращается в нуль.

Всегда ли это так? И что может произойти, если отказаться от этого свойства?
Пусть m — составное натуральное число (например, $m = 10 = 2 \cdot 5$) и $\mathbb{Z}_m$ — множество остатков от при делении на m (в нашем случае, $\overline{1}$; $\overline{2}$; $\overline{3}$; $\overline{4}$; $\overline{5}$; $\overline{6}$; $\overline{7}$; $\overline{8}$; $\overline{9}$; $\overline{0}$). Тогда $\overline{2} \cdot \overline{5} = \overline{0}$.
Если же m — простое число, то $\overline{k} \cdot \overline{l} = \overline{0} \Rightarrow \overline{k} = \overline{0}$ или $\overline{l} = \overline{0}$.
Более того, в этой числовой системе определяется операция деления на ненулевое число.

Спасибо за внимание!